

No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without written permission from the IB.

Additionally, the license tied with this product prohibits commercial use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, is not permitted and is subject to the IB's prior written consent via a license. More information on how to request a license can be obtained from <http://www.ibo.org/contact-the-ib/media-inquiries/for-publishers/guidance-for-third-party-publishers-and-providers/how-to-apply-for-a-license>.

Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite de l'IB.

De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation commerciale de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, n'est pas autorisée et est soumise au consentement écrit préalable de l'IB par l'intermédiaire d'une licence. Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour demander une licence, rendez-vous à l'adresse <http://www.ibo.org/fr/contact-the-ib/media-inquiries/for-publishers/guidance-for-third-party-publishers-and-providers/how-to-apply-for-a-license>.

No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin que medie la autorización escrita del IB.

Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso con fines comerciales de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales— no está permitido y estará sujeto al otorgamiento previo de una licencia escrita por parte del IB. En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una licencia: <http://www.ibo.org/es/contact-the-ib/media-inquiries/for-publishers/guidance-for-third-party-publishers-and-providers/how-to-apply-for-a-license>.

Matemáticas
Nivel Superior
Prueba 3 – Matemáticas discretas

Jueves 21 de noviembre de 2019 (tarde)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[50 puntos]**.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 10]

Un conductor tiene que repartir mercancías a cinco tiendas A, B, C, D y E . El conductor inicia y acaba su recorrido en el almacén W . El conductor quiere hallar la ruta más corta que pase por todas las tiendas y le lleve de vuelta al almacén. En la siguiente tabla se muestran las distancias, en kilómetros, que hay entre estos lugares.

	A	B	C	D	E	W
A	-	11	28	15	20	40
B	11	-	25	20	32	36
C	28	25	-	16	22	39
D	15	20	16	-	12	42
E	20	32	22	12	-	41
W	40	36	39	42	41	-

- (a) Borrando W , utilice el algoritmo de vértice borrado para hallar un límite inferior para la longitud de una ruta que pase por todas las tiendas y que empiece y acabe en W . [6]
- (b) Empezando en W , utilice el algoritmo del vecino más próximo para hallar una ruta que represente un límite superior para este problema y calcule su longitud. [4]

2. [Puntuación máxima: 15]

- (a) (i) Indique el pequeño teorema de Fermat.
- (ii) Halle el resto que se obtiene al dividir 15^{1207} entre 13. [7]

En los apartados (b) y (c), $(abc\dots)_n$ denota el número $abc\dots$ escrito en base n , donde $n \in \mathbb{Z}^+$. Por ejemplo, $(359)_n = 3n^2 + 5n + 9$.

- (b) Convierta $(7A2)_{16}$ a base 5, donde $(A)_{16} = (10)_{10}$. [4]
- (c) Considere la ecuación $(1251)_n + (30)_n = (504)_n + (504)_n$.
Halle el valor de n . [4]

3. [Puntuación máxima: 6]

Sea una relación de recurrencia lineal definida por

$$u_n = au_{n-1} + b, \text{ donde } a, b \in \mathbb{R}.$$

Los dos primeros términos son $u_1 = 25$ y $u_2 = 16$.

(a) Sabiendo que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 10$, muestre que $a = \frac{2}{5}$. [4]

(b) A partir de lo anterior, halle el valor de u_3 . [2]

4. [Puntuación máxima: 14]

(a) G es un grafo conexo y simple que tiene ocho vértices.

(i) Escriba el número mínimo de aristas que puede tener G .

(ii) Halle el número máximo de aristas que puede tener G .

(iii) Halle el número máximo de aristas que puede tener G , sabiendo que G contiene un circuito euleriano. [5]

(b) H es un grafo planario y conexo que tiene v vértices, e aristas y f caras. Cada una de las caras de H está delimitada por exactamente k aristas.

(i) Explique por qué $2e = kf$.

(ii) Halle el valor de f cuando $v = 9$ y $k = 3$.

(iii) Halle los posibles valores de f cuando $v = 13$. [9]

5. [Puntuación máxima: 5]

Se colocan diez puntos en cualquier lugar del interior o del perímetro de un cuadrado de lado igual a 1.

Utilice el principio del palomar para demostrar que al menos dos de estos puntos están

separados por una distancia menor o igual que $\frac{\sqrt{2}}{3}$.